

TD 43 : Sous-espaces affines

Sous-espaces affines

1 ★ On pose :

$$M_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda - \mu & 0 \\ 2 - \lambda - \mu & \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \{M_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

- 1) Écrire $M_{\lambda,\mu}$ sous la forme $A + \lambda B + \mu C$ avec A, B, C trois matrices à déterminer.
- 2) En déduire que \mathcal{F} est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On donnera un point de \mathcal{F} ainsi que la direction de \mathcal{F} .

2 ★★ On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{F} = \{f \in E \mid f(a) = b\}$$

L'objectif est de montrer que \mathcal{F} est un sous-espace affine de E .

- 1) Identifier un hyperplan H de E tel que pour tous $f, g \in \mathcal{F}$, on a $f - g \in H$.
- 2) Conclure. On donnera un point de \mathcal{F} ainsi que la direction de \mathcal{F} .

Équations affines

3 ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On considère l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec a, b, c des réels donnés et $a \neq 0$.

- 1) Réécrire (E) sous la forme d'une équation affine : on notera φ l'application linéaire de cette réécriture.
- 2) On note H l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Exprimer H en fonction de φ .
- 3) On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : H &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y(0), y'(0)) \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est bijective. En déduire la dimension de H .

4) Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(a, b, c) = (1, -3, 2)$. Déterminer une base de H .

5) On suppose disposer d'une solution particulière y_p de (E) . Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des points distincts, et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. On pose \mathcal{P} l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

Montrer que \mathcal{P} est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$. On donnera un point de \mathcal{P} ainsi que la direction de \mathcal{P} .

5 ★★ On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On souhaite trouver toutes les fonctions $f \in E$ qui vérifient

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) + 1$$

On pose \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) , i.e. :

$$\mathcal{S} = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) + 1\}$$

- 1) Donner une solution particulière simple de E , notée f_0 .
- 2) Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que $f - f_0$ est solution d'une équation fonctionnelle (E_H) que l'on précisera.
- 3) Vérifier que les solutions de (E_H) sont exactement les fonctions 1-périodiques.
- 4) En déduire \mathcal{S} .
- 5) Vérifier que \mathcal{S} est un sous-espace affine. Préciser sa direction.
- 6) Réécrire (E) sous la forme d'une équation affine.